

Capítulo

6

LA PARABOLA

6.1 DEFINICION

La parábola es el conjunto de puntos situados en un plano de tal modo que desde cada punto, las distancias no orientadas a un punto fijo y una recta fija son iguales.

El punto fijo F se llama *foco*, y la recta fija \mathcal{P} , *directriz*. La recta que pasa por el foco perpendicularmente a la directriz se llama *eje*. El segmento de recta que pasa por el foco perpendicularmente al eje y que es interceptado por la parábola se llama *lado recto*. (Muchos autores lo llaman cuerda normal). La recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola tal como \overline{CD} se llama *cuerda*, en particular, a la cuerda que pasa por el foco, tal como \overline{AB} , se llama *cuerda focal*. Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta \overline{PF} se llama *radio focal* de P , o *radio vector*.

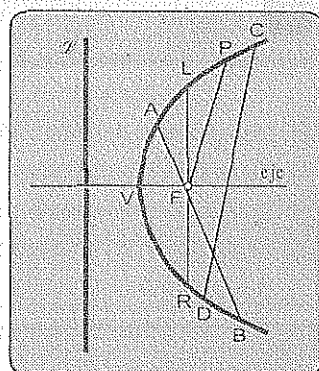


FIGURA 6.1

6.2 ECUACION DE LA PARABOLA DE VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE UN EJE COORDENADO

TEOREMA 6.1 La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje, el eje Y , es

$$y^2 = 4px \quad (1)$$

en donde el foco es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda. Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su ecuación es:

$$x^2 = 4py \quad (2)$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo. En cada caso, la longitud del lado recto está dado por el valor absoluto de $4p$, que es el coeficiente del término de primer grado.

Nota. Las ecuaciones (1) y (2) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria* de la parábola.

EJERCICIOS . Grupo 23

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1 $y^2 = 12x$

Solución. La ecuación es de la forma: $y^2 = 4px$
 $\Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \quad (p > 0)$

- Coordenadas del foco: $F(p, 0) \Rightarrow F(3, 0)$
- Ecuación de la directriz: $x = -p \Rightarrow \mathcal{L}: x = -3$
- Longitud del lado recto: $LR = |4p| = 12$
- Como $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha del eje Y, y su eje coincide con el eje X.

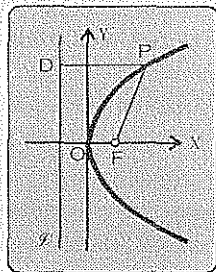


FIGURA 6.2

2 $x^2 = 12y$

Solución. La ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$
 $\Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \quad (p > 0)$

- Coordenadas del foco: $F(0, p) \Rightarrow F(0, 3)$
- Ecuación de la directriz: $y = -p \Rightarrow \mathcal{L}: y = -3$
- Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 12$

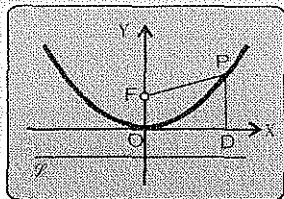


FIGURA 6.3

d) Como $p > 0$, la curva se abre hacia arriba y su eje coincide con el Y

3 $y^2 = -8x$

Solución. La ecuación es de la forma $y^2 = 4px$

$$\text{Si } 4p = -8 \Rightarrow p = -2 \quad (p < 0)$$

- a) Coordenadas del foco : $F(p, 0) \Rightarrow F(-2, 0)$
- b) Ecuación de la directriz : $x = -p \Rightarrow \mathcal{L}: x = 2$
- c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$
- d) Dado que $p < 0$, la curva se abre hacia la izquierda del eje Y, y su eje de simetría coincide con el eje X.

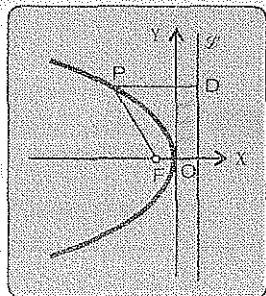


FIGURA 6.4

4 $x^2 = -2y$

Solución. La ecuación es de la forma $x^2 = 4py$

$$\text{Si } 4p = -2 \Rightarrow p = -1/2 \quad (p < 0)$$

- a) Coordenadas del foco : $F(0, p) \Rightarrow F(0, -1/2)$
- b) Ecuación de la directriz : $y = -p \Rightarrow \mathcal{L}: 2y - 1 = 0$
- c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 2$
- d) Como $p < 0$, la curva se abre hacia abajo del eje X, y su eje coincide con el eje Y. (Figura 6.5)

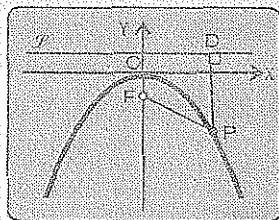


FIGURA 6.5

5 Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, $F(0, p)$ el foco y \mathcal{L} su directriz.

Por definición de parábola el punto P debe satisfacer la condición geometría : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{L})|$

cuya forma analítica es :

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificando, obtenemos : $x^2 = 4py$

La discusión de la ecuación se deja a cargo del lector.

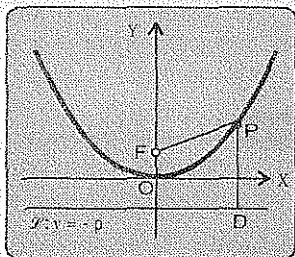


FIGURA 6.6

8 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $F(3, 0)$.

Solución. Como el foco $F(3, 0)$ está sobre el eje X , la ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 4px$.

Por el Teorema 6.1, $F(p, 0) \Rightarrow p = 3$, por lo que la ecuación de la parábola es

$$\mathcal{P}: y^2 = 12x$$

9 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $F(0, -3)$.

Solución. Dado que el foco $F(0, -3)$ está sobre el eje Y , la ecuación de la parábola es de la forma, $\mathcal{P}: x^2 = 4py$

Por el Teorema 6.1, $F(0, p) \Rightarrow p = -3$, por tanto, la ecuación de la parábola es

$$\mathcal{P}: x^2 = -12y$$

10 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $\mathcal{L}: y - 5 = 0$

Solución. Como la directriz es una recta horizontal, el eje de la parábola es vertical, por lo que su ecuación es de la forma, $\mathcal{P}: x^2 = 4py$

Por el Teorema 6.1, $\mathcal{L}: y = -p \Rightarrow p = -5$, y la ecuación buscada es

$$\mathcal{P}: x^2 = -20y$$

11 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $\mathcal{L}: x + 5 = 0$

Solución. Siendo la directriz $\mathcal{L}: x = -5$, una recta vertical, la ecuación de la parábola, de eje horizontal, es de la forma, $\mathcal{P}: y^2 = 4px$

Por el Teorema 6.1, $\mathcal{L}: x = -p \Rightarrow p = 5$, por tanto, la ecuación de la parábola es

$$\mathcal{P}: y^2 = 20x$$

12 Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coinciden con el eje X pasa por el punto $A(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. La ecuación de la parábola es de la forma, $\mathcal{P}: y^2 = 4px$

$$\text{Si } A(-2, 4) \in \mathcal{P} \Rightarrow (4)^2 = 4p(-2) \Leftrightarrow p = -2. \text{ Luego, } \mathcal{P}: y^2 = -8x$$

a) Coordenadas del foco: $F(p, 0) \Rightarrow F(-2, 0)$

b) Ecuación de la directriz: $x = -p \Rightarrow \mathcal{L}: x = 2$

c) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$

- 13** Una cuerda de la parábola $\mathcal{P}: y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $\mathcal{L}: x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

Solución. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos de la cuerda. Entonces la solución común de las ecuaciones de \mathcal{L} y \mathcal{P} serán las coordenadas de A y B, esto es:

$$(x - 2y + 3 = 0) \cap (y^2 = 4x) = A(1, 1) \text{ y } B(9, 6)$$

Por el teorema de la distancia: $|\overline{AB}| = \sqrt{(9-1)^2 + (6-1)^2} = 4\sqrt{5}$

- 14** Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $\mathcal{P}: x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $\mathcal{L}_1: 3x + 4y - 7 = 0$

Solución. Si $x^2 = -8y \Leftrightarrow 4p = -8 \Leftrightarrow p = -2$; luego, $F(0, -2)$

La ecuación de la cuerda focal, paralela a la recta \mathcal{L}_1 es

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Leftrightarrow \mathcal{L}: 3x + 4y + 8 = 0$$

De la intersección de \mathcal{L} y \mathcal{P} obtendremos las coordenadas de los extremos de la cuerda focal, esto es:

$$(3x + 4y + 8 = 0) \cap (x^2 + 8y = 0) = A(-2, -1/2), B(8, -8)$$

$$\therefore |\overline{AB}| = \sqrt{(8+2)^2 + (-8+1/2)^2} = 25/2$$

- 15** Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ es igual $|x_1 + p|$.

Demostración. En efecto, si $F(p, 0)$ son las coordenadas del foco, entonces, por el teorema de la distancia, la longitud del radio vector es

$$r = |\overline{FP_1}| = \sqrt{(x_1 - p)^2 + (y_1)^2} \quad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (y_1)^2 = 4px_1$

Luego, en (1) se tiene: $r = \sqrt{(x_1)^2 - 2px_1 + p^2 + 4px_1} = \sqrt{(x_1 + p)^2}$

$$\therefore r = |x_1 + p|$$

- 16** Hallar la longitud del radio de un punto de la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 9x$, cuya ordenada es igual a 6.

Solución. Si $P_1(x_1, 6) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (6)^2 = 9x_1 \Leftrightarrow x_1 = 4$

Además, si $y^2 = 9x \Leftrightarrow 4p \Leftrightarrow p = 9/4$

Haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 15 tendremos:

$$r = |4 + 9/4| = 25/4$$

- 17** De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción de eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

Demostración. Probaremos que: $|\overline{AP}_1|^2 = |\overline{LR}| \times |\overline{OA}|$

En efecto, sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$

$$\text{Si } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \quad (1)$$

En esta ecuación: $y_1 = |\overline{AP}_1|$, $4p = |\overline{LR}|$ y $x_1 = |\overline{OA}|$

Por lo tanto, sustituyendo cada uno de estos valores en (1) obtendremos:

$$|\overline{AP}_1|^2 = |\overline{LR}| \times |\overline{OA}| \quad \blacksquare$$

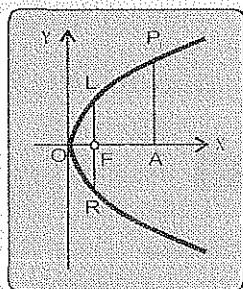


FIGURA 6.7

- 18** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $\mathcal{P}: x^2 - 4y = 0$.

Solución. Si $x^2 = 4y \Rightarrow 4p = 4 \Leftrightarrow p = 1$

Por el Teorema 6.1, las coordenadas del foco son: $F(0, 1)$ y por simetría las coordenadas de los extremos del lado recto son

$$L(|2p|, 1) \text{ y } R(-|2p|, 1) \Rightarrow L(2, 1) \text{ y } R(-2, 1)$$

Sea la ecuación de la circunferencia, $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$

$$\text{Si } V(0, 0) \in \mathcal{C} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$L(2, 1) \in \mathcal{C} \Rightarrow 4 + 1 + 2D + E = 0 \Rightarrow 2D + E = -5 \quad (2)$$

$$R(-2, 1) \in \mathcal{C} \Rightarrow 4 + 1 - 2D + E = 0 \Rightarrow -2D + E = -5 \quad (3)$$

La solución común de (2) y (3) es: $D = 0$ y $E = -5$

Por tanto, en (1), la ecuación de la circunferencia buscada es, $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 5y = 0 \quad \blacksquare$

- 19** Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ cuyo foco es $F(p, 0)$, y cuyos extremos de su lado recto tienen por coordenadas:

$$L(p, 2p) \text{ y } R(p, -2p)$$

La ecuación de la directriz es, $\mathcal{D}: x = -p$

$$\text{Si } A \in \mathcal{D} \Rightarrow A(-p, 0).$$

$$\text{Pendiente de } \overline{AL} : m_1 = \frac{2p-0}{p+p} = 1$$

$$\text{Pendiente de } \overline{AR} : m_2 = \frac{-2p-0}{p+p} = -1$$

$$\text{Dado que } m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \overline{AL} \perp \overline{AR}$$

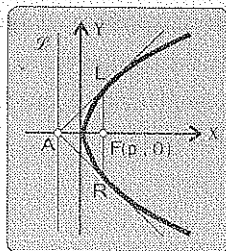


FIGURA 6.8

- 20** Una circunferencia cuyo centro es el punto $C(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $\mathcal{P}: x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

Demostración. Bastará probar que $r = d(C, \mathcal{P})$,

donde \mathcal{P} es la directriz de la parábola.

En efecto, si $x^2 = -16y \Rightarrow 4p = -16 \Leftrightarrow p = -4$

Por el Teorema 6.1, las coordenadas del foco son $F(0, -4)$ y la ecuación de la directriz, $\mathcal{P}: y - 4 = 0$

Radio de la circunferencia: $r = |\overline{CF}|$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(4-0)^2 + (-1+4)^2} = 5$$

$$d(C, \mathcal{P}) = |-1-4| = 5$$

Como $r = d(C, \mathcal{P})$, hemos probado que la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola.

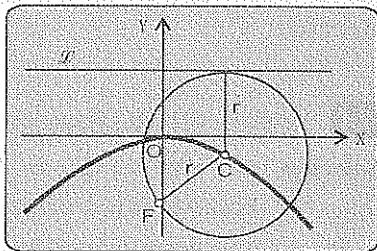


FIGURA 6.9

- 21** Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X e Y , el eje y y la directriz respectivamente.

La solución se deja a cargo del lector.

$$\text{Sol. } -y^2 = 4p(x-p)$$

En cada uno de los ejercicios del 22 al 25, aplicando la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

- 22** Foco: $F(3, 4)$; directriz, $\mathcal{P}: x - 1 = 0$

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, el cual, por definición debe satisfacer la propiedad geométrica

$$|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{P})|$$

cuya expresión analítica es: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = |x-1|$

de donde obtenemos: $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$

Completando el cuadrado para la variable y , se tiene: $(y-4)^2 = 4(x-2)$

Haciendo $x' = x - 2$, $y' = y - 4$, obtenemos la transformada

$$y'^2 = 4x'$$

23 Foco: $F(3, -5)$; directriz: $\mathcal{D}: y - 1 = 0$

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que, por definición, debe satisfacer la propiedad: $|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{D})|$

cuya forma analítica es: $\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = |y-1|$

de donde obtenemos: $x^2 - 6x + 12y + 33 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -12(y+2)$

Haciendo: $x' = x - 3$, $y' = y + 2$, se tiene la transformada: $x'^2 = 12y'$

24 Vértice: $V(2, 0)$, Foco: $F(0, 0)$

Solución. Si $p = \overline{VF} \Rightarrow p = 0 - 2 = -2$

Ecuación de la directriz: $x = 2 - p = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow \mathcal{D}: x - 4 = 0$

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola $\Rightarrow |\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{D})|$

Cuya expresión analítica es: $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - 4|$

de donde: $y^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -8(x-2)$

Haciendo $y = y'$, $x - 2 = x'$, obtenemos la transformada: $y'^2 = -8x'$

25 Foco: $F(-1, 1)$, directriz: $\mathcal{D}: x + y - 5 = 0$

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que por definición, debe satisfacer la propiedad geométrica: $|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{D})|$

cuya expresión analítica es: $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$

de donde: $x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$ (1)

Angulo de rotación: $\text{Tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{1-1} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$

Ecuaciones de rotación: $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y')$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en (1) y simplificando obtenemos

$$2y'^2 + 10\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2) = -10\sqrt{2}x' + 21 + 4 \Leftrightarrow 2(y' - \sqrt{2})^2 = -10\sqrt{2}\left(x' - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$$

Haciendo : $y' - \sqrt{2} = y''$, $x' - \frac{5\sqrt{2}}{4} = x''$, obtenemos la transformada

$$y''^2 = -5\sqrt{2}x''$$

6.3 ECUACION DE UNA PARABOLA DE VERTICE (h, k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO

TEOREMA 6.2 La ecuación de una parábola con vértice en (h, k) , foco en $(h + p, k)$, y eje paralelo al eje X , es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (3)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; Si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

La ecuación de la parábola de vértice (h, k) , foco $(h, k + p)$, y eje paralelo al eje Y , es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (4)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Demostración. Traslademos los ejes coordenados de modo que el nuevo origen O' coincide con el vértice $V(h, k)$. Por el Teorema 6.1, la ecuación de la parábola referida a los ejes X' e Y' está dada por

$$y'^2 = 4px' \quad (1)$$

De las ecuaciones de traslación: $x = x' + h$, $y = y' + k$ se tiene : $x' = x - h$, $y' = y - k$, que sustituida en (1) obtenemos :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Análogamente, para la parábola de vértice $V(h, k)$ y cuyo eje es paralelo al eje Y , se demuestra que tiene por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

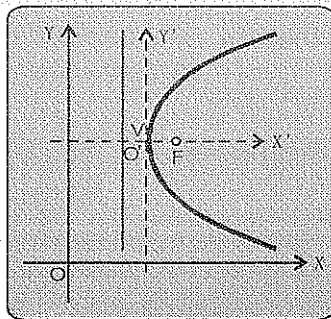


FIGURA 6.10

Nota. Las ecuaciones (3) y (4) se llaman generalmente, *segunda ecuación ordinaria* de la parábola.

6.4 ECUACION GENERAL DE UNA PARABOLA

TEOREMA 6.3 Una ecuación cuadrática en las variables x e y , y sin término en xy puede escribirse de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- a) Si $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación representa una parábola de eje paralelo o coincidente con el eje X . Si $D = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas o coincidentes con el eje X , o un conjunto vacío, según que las raíces de la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales o iguales o complejas.
- b) Si $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, ($E \neq 0$), la ecuación representa una parábola de eje paralelo o coincidente con el eje Y . Si $E = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas o coincidentes con el eje Y o un conjunto vacío según que las raíces de la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

EJERCICIOS . Grupo 24

[Nota. Los ejercicios del 1 al 6 son demostraciones y deducciones de fórmula que pueden ser fácilmente probadas y deducidas por el estudiante. por lo que se les deja como tarea.

- 7** Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $V(-4, 3)$ y $F(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

Solución. Como el vértice están sobre una línea horizontal, (tienen la misma ordenada), la ecuación de la parábola es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (1)$$

Por el Teorema 6.2: $V(h, k) = V(-4, 3) \Rightarrow h = -4$ y $k = 3$

$$F(h + p, k) = F(-1, 3) \Rightarrow h + p = -1$$

$$\Rightarrow -4 + p = -1 \Leftrightarrow p = 3$$

Luego, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathcal{P}: (y - 3)^2 = 12(x + 4)$

Ecuación de la directriz: $x = h - p \Rightarrow \mathcal{D}: x = -7$

Ecuación del eje de simetría: $y = k \Rightarrow y = 3$

- 8** Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $V(3, 3)$ y $F(3, 1)$, respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como los puntos V y F están sobre una línea vertical l, (tienen la misma abscisa), el eje de la parábola es paralelo al eje Y, y su ecuación es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (1)$$

Por el Teorema 6.2: $V(h, k) = V(3, 3) \Rightarrow h = k = 3$

$$F(h, k + p) = F(3, 1) \Rightarrow k + p = 1$$

$$\Rightarrow 3 + p = 1 \Rightarrow p = -2$$

Luego, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathcal{P}: (x - 3)^2 = -8(y - 3)$

Ecuación de la directriz: $y = k - p \Rightarrow \mathcal{D}: y = 5$

Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$

9 La directriz de una parábola es la recta $\mathcal{D}: y - 1 = 0$, y su foco es el punto $F(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

Solución. Método 1. Aplicando la definición de parábola

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que debe satisfacer la propiedad geométrica: $|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{D})|$

cuya expresión analítica es: $\sqrt{(x - 4)^2 + (y + 1)^2} = |y - 1|$

de donde obtenemos la ecuación de la parábola $\mathcal{P}: (x - 4)^2 = -8(y + 1)$

Método 2. Aplicando el Teorema 6.2

Forma de la ecuación de la parábola: $(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (1)$

Si $F(h, k + p) = F(4, -3) \Rightarrow h = 4 \wedge k + p = -3 \quad (2)$

Ecuación de la directriz, $\mathcal{D}: y = k - p \Rightarrow k - p = 1 \quad (3)$

La solución común de las ecuaciones (2) y (3) es: $k = -1, p = -2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathcal{P}: (x - 4)^2 = -8(y + 1)$

10 La directriz de una parábola es la recta $\mathcal{D}: x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $V(0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

Solución. Método 1. Aplicando la definición de parábola

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que debe satisfacer la condición geométrica: $|\overline{FP}| = |d(P, \mathcal{D})|$

y cuya expresión analítica es: $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} = |x + 5|$

de donde obtenemos la ecuación de la parábola, $\mathcal{P}: (y - 3)^2 = 20(x - 0)$

El segundo método, por aplicación del Teorema 6.2, se deja para el lector.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, de la longitud del lado recto.

11 $4y^2 - 48x - 20y = 71$

Solución. Completando el cuadrado para la variable y , se tiene:

$$4(y^2 - 5y + \frac{25}{4}) = 48x + 71 + 25 \Leftrightarrow (y - 5/2)^2 = 12(x + 2)$$

$$\Rightarrow h = -2, \quad k = 5/2, \quad p = 3$$

- a) Coordenadas del vértice: $V(h, k) \Rightarrow V(-2, 5/2)$
- b) Coordenadas del foco: $F(h + p, k) \Rightarrow F(1, 5/2)$
- c) Ecuación de la directriz: $x = h - p \Rightarrow \mathcal{D}: x + 5 = 0$
- d) Ecuación del eje: $y = k \Rightarrow y = 5/2 \Leftrightarrow \ell: 2y - 5 = 0$
- e) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 12$

12 $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Solución. Completando el cuadrado para la variable x , se tiene:

$$9(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}) = -72y - 16 + 16 \Leftrightarrow (x + 4/3)^2 = -8(y - 0)$$

$$\Rightarrow h = -4/3, \quad k = 0, \quad p = -2$$

- a) Coordenadas del vértice: $V(h, k) \Rightarrow V(-4/3, 0)$
- b) Coordenadas del foco: $F(h, k + p) \Rightarrow F(-4/3, -2)$
- c) Ecuación de la directriz: $y = k - p \Rightarrow \mathcal{D}: y = 2$
- d) Ecuación del eje: $x = h \Rightarrow x = -4/3 \Leftrightarrow \ell: 3x + 4 = 0$
- e) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$

13 $y^2 + 4x = 7$

Solución. Si $y^2 = -4x + 7 \Rightarrow (y - 0)^2 = -4(x - 7/4)$

$$\Rightarrow h = 7/4, \quad k = 0, \quad p = -1$$

- a) Coordenadas del vértice: $V(h, k) \Rightarrow V(7/4, 0)$
- b) Coordenadas del foco: $F(h + p, k) \Rightarrow F(3/4, 0)$
- c) Ecuación de la directriz: $x = h - p \Rightarrow \mathcal{D}: x = 11/4 \Leftrightarrow \mathcal{D}: 4x - 11 = 0$
- d) Ecuación del eje: $y = k \Rightarrow y = 0$
- e) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 4$

14 $4x^2 + 48y + 12x = 159$

Solución. Reduciendo la ecuación a la segunda forma ordinaria se tiene:

$$4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = -48y + 159 + 9 \Leftrightarrow (x + 3/2)^2 = -12(y - 7/2) \\ \Rightarrow h = -3/2, \quad k = 7/2, \quad p = -3$$

- a) Coordenadas del vértice: $V(h, k) \Rightarrow V(-3/2, 7/2)$
 b) Coordenadas del foco: $F(h, k + p) \Rightarrow F(-3/2, 1/2)$
 c) Ecuación de la directriz: $y = k - p \Rightarrow \mathcal{L}: y = 13/2 \Leftrightarrow \mathcal{L}: 2y - 13 = 0$
 d) Ecuación del eje: $x = h \Rightarrow x = -3/2 \Leftrightarrow \ell: 2x + 3 = 0$
 e) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = 12$

15 $y = ax^2 + bx + c$

Solución. Reduciendo la ecuación a la segunda forma ordinaria se tiene:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - b^2 - \frac{4ac}{4a}\right) \\ \Rightarrow h = -\frac{b}{2a}, \quad k = \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad p = \frac{1}{4a}$$

- a) Coordenadas del vértice: $V(h, k) \Rightarrow V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$
 b) Coordenadas del foco: $F(h, k + p) \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac + 1}{4a}\right)$
 c) Ecuación de la directriz: $y = k - p \Rightarrow \mathcal{L}: y = \frac{b^2 - 4ac - 1}{4a}$
 d) Ecuación del eje: $x = h \Rightarrow \ell: x = -b/2a$
 e) Longitud del lado recto: $LR = |4p| \Rightarrow LR = |1/a|$

17 Resolver el Ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

La solución se deja a cargo del lector.

18 Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0, D \neq 0$

Solución. Si $A = E = F = 0$, la ecuación se reduce a $Cy^2 + Dx = 0 \Rightarrow y^2 = -\frac{D}{C}x$

La ecuación representa una parábola con vértice en el origen y eje de

simetría coincidente con el eje X.

Dado que $4p = -D/C$, la longitud del lado recto es : $LR = |4p| = D/C$

Si $\frac{D}{C} < 0$, la parábola se abre hacia la derecha

Si $\frac{D}{C} > 0$, la parábola se abre hacia la izquierda. ■

19 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $P(3/2, -1)$, $Q(0, 5)$ y $R(-6, -7)$

Solución. Por el Teorema 6.2, la ecuación buscada es de la forma

$$\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (1)$$

$$\text{Si } P(3/2, -1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (-1 - k)^2 = 4p(3/2 - h) \quad (2)$$

$$Q(0, 5) \in \mathcal{P} \Rightarrow (5 - k)^2 = 4p(0 - h) \quad (3)$$

$$R(-6, -7) \in \mathcal{P} \Rightarrow (-7 - k)^2 = 4p(-6 - h) \quad (4)$$

Resolviendo, por simultáneas, (2), (3) y (4) obtenemos : $h = 2$, $k = 1$ y $p = -2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathcal{P}: (y - 1)^2 = -8(x - 2)$ ■

20 Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$

La solución se deja al lector. **Sol.** $V(0, 2)$, $F(0, 1)$, $\mathcal{L}: x = 4$, $\ell: y = 1$, $LR = 8$

21 Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común $F(3, 4)$ y un eje común paralelo al eje Y.

Solución. Las parábolas cuyos ejes son paralelos al eje Y tienen por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (1)$$

Dado que el foco común es $F(3, 4) = F(h, k + p)$, entonces, por igualdad de pares ordenados :

$$(h = 3) \wedge (k + p = 4 \Rightarrow p = 4 - k)$$

Sustituyendo estos valores de h y p en (1), obtenemos la ecuación pedida, esto es :

$$(x - 3)^2 = 4(4 - k)(y - k) \quad \blacksquare$$

22 La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir como varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c .

Solución. Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$(x+1/2)^2 = \frac{1}{4} (y+1-c)$$

La ecuación representa una familia de parábolas con vértice sobre la recta $x = -1/2$ (Eje de simetría). Entonces :

Si $c = 1$, el vértice está sobre el eje X

Si $c < 1$, el vértice está debajo del eje X

Si $c > 1$, el vértice está arriba del eje X

23 La ecuación de una familia de parábolas es $\mathcal{P}: y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por $A(2, 8)$ y $B(-1, 5)$.

Solución. Si $A(2, 8) \in \mathcal{P} \Rightarrow 8 = 4a + 2b$ (1)

$B(-1, 5) \in \mathcal{P} \Rightarrow 5 = a - b$ (2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos : $a = 3$ y $b = -2$

Sustituyendo estos valores en \mathcal{P} se tiene : $y = 3x^2 - 2x$

24 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $A(0, 0)$, $B(8, -4)$ y $C(3, 1)$.

Solución. Sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

Si $A(0, 0) \in \mathcal{P} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0$

$B(8, -4) \in \mathcal{P} \Rightarrow 16 + 8D - 4E = 0 \Rightarrow 2D - E = -4$ (2)

$C(3, 1) \in \mathcal{P} \Rightarrow 1 + 3D + E = 0 \Rightarrow 3D + E = -1$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $D = -1$ y $E = 2$

Sustituyendo estos valores en (1) obtenemos la ecuación de la parábola

$$\mathcal{P}: y^2 - x + 2y = 0$$

25 Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $V(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $A(3, -3)$.

Solución. Como el eje es una recta horizontal ($y = -1$), la ecuación de la parábola es de la forma, $\mathcal{P}: (y + 1)^2 = 4p(x - 4)$

Si $A(3, -3) \in \mathcal{P} \Rightarrow (-3 + 1)^2 = 4p(3 - 4)$, de donde se tiene, $p = -1$

$$\therefore \mathcal{P}: (y + 1)^2 = -4(x - 4)$$

26 Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de la parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

Demostración. En efecto, sea la parábola de eje horizontal

$$\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Como se sabe, su eje tiene por ecuación $\ell: y = k$. Entonces, la ecuación de una recta paralela al eje es, $\ell_1: y = a$. Si interceptamos esta recta con la parábola obtendremos :

$$(a - k)^2 = 4p(x - h) \Rightarrow x = \frac{(a - k)^2}{4p} + h$$

Por tanto, la recta ℓ_1 corta a la parábola en un sólo punto. ■

27 Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

Demostración. En efecto, las coordenadas del foco de la parábola son $F(h + p, k)$

$$\text{Si } r = |FP_1| \Rightarrow r = \sqrt{(x_1 - h - p)^2 + (y_1 - k)^2} \quad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_1 - k)^2 = 4p(x_1 - h)$

Sustituyendo en (1) se tiene : $r = \sqrt{(x_1 - h - p)^2 + 4p(x_1 - h)}$

de donde obtenemos : $r = \sqrt{x_1^2 + h^2 + p^2 - 2hx_1 + 2px_1 - 2ph} = \sqrt{(x_1 - h + p)^2}$

$$\therefore r = |x_1 - h + p| \quad \blacksquare$$

28 Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$, cuya ordenada es igual a 3.

Solución. La ecuación en su forma ordinaria es, $\mathcal{P}: (y + 1)^2 = -4(x - 5)$

de donde se tiene : $h = 5$, $k = -1$ y $4p = -4 \Rightarrow p = -1$

Si $A(x_1, 3) \in \mathcal{P} \Rightarrow (3 + 1)^2 = -4(x_1 - 5) \Leftrightarrow x_1 = 1$

Luego haciendo uso de la fórmula obtenida en el Ejercicio 27, se sigue que

$$r = |1 - 5 - 1| = 5 \quad \blacksquare$$

29 Hallar e identificar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $\mathcal{L}: x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $A(1, 1)$

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|d(P, \mathcal{L})| + 2 = |\overline{AP}|$

2. La forma analítica de esta condición es : $|x + 3| + 2 = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$

3. Por definición de valor absoluto, tendremos :

- a) Si $x > -3 \Rightarrow |x+3| = +(x+3) \Rightarrow x+5 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
de donde resulta la ecuación : $y^2 - 12x - 2y - 23 = 0$
- b) Si $x < -3 \Rightarrow |x+3| = -(x+3) \Rightarrow -x-1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
de donde obtenemos : $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
- En ambos casos, el lugar geométrico es una parábola.

- 30** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $\mathcal{P}: y - 1 = 0$ y a la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que satisface la condición mostrada en la Figura 6.11, esto es :

$$\overline{OP} = \overline{OT} + \overline{TP} \Rightarrow \overline{OP} = 3 + |d(P, \mathcal{P})|$$

2. La forma analítica de esta condición es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + |y - 1|$$

3. Por definición de valor absoluto se tiene :

- a) Si $y > 1 \Rightarrow |y - 1| = y - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = y + 2$
de donde resulta la ecuación , $\mathcal{P}: x^2 - 4y - 4 = 0$
- b) Si $y < 1 \Rightarrow |y - 1| = -(y - 1) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y$
de donde obtenemos la ecuación , $\mathcal{P}_1: x^2 + 8y - 16 = 0$

En ambos casos los lugares geométricos son parábolas cuyas gráficas se muestran en la Figura 6.11

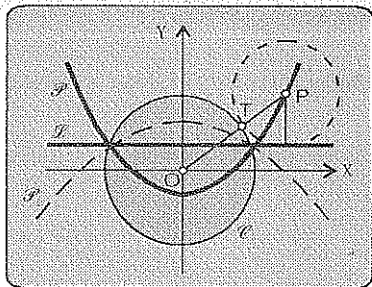


FIGURA 6.11

6.5 ECUACION DE LA TANGENTE A UNA PARABOLA

La determinación de la ecuación de la tangente a la parábola es similar a la ya estudiada para la circunferencia; esto es, los casos que se presentan son :

1. *Tangente en un punto de contacto dado*
2. *Tangente con una pendiente dada*
3. *Tangente trazada desde un punto exterior*

TEOREMA 6.4 La tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto cualquiera de la curva tiene por ecuación

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Demostración. En efecto, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto de la parábola

$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

La ecuación de la tangente que pasa por P_1 es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y = mx + y_1 - mx_1 \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene:

$$m^2x^2 + (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0$$

Por condición de tangencia

$$(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0$$

$$\text{efectuando se reduce a: } x_1m^2 - y_1m + p = 0 \Leftrightarrow m = \frac{y_1 \pm \sqrt{(y_1)^2 - 4px_1}}{2x_1} \quad (2)$$

$$\text{Como } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Leftrightarrow (y_1)^2 - 4px_1 = 0$$

Luego, en (2), $m = \frac{y_1}{2x_1}$. Sustituyendo este valor en (1), obtenemos

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1} (x - x_1) \Leftrightarrow 2x_1y = y_1(x + x_1) \quad (3)$$

De la ecuación $(y_1)^2 = 4px_1$, se tiene: $2x_1 = \frac{(y_1)^2}{2p}$

$$\text{Por lo tanto, en (3): } \frac{(y_1)^2}{2p} y = y_1(x + x_1) \Leftrightarrow y_1y = 2p(x + x_1)$$

TEOREMA 6.5 La tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ tiene por ecuación

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0$$

Demostración. En efecto, sea la ecuación de la tangente: $y = mx + b$ (1)

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene:

$$(mx + b)^2 = 4px \Leftrightarrow m^2x^2 + (2bm - 4p)x + b^2 = 0$$

Por condición de tangencia: $(2bm - 4p)^2 - 4m^2b^2 = 0 \Leftrightarrow b = p/m$

Sustituyendo este valor de b en (1), nos da la ecuación buscada

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

EJERCICIOS . Grupo 25

En cada uno de los ejercicios del 1 al 3, hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y punto de contacto dados.

1 $y^2 - 4x = 0$, $T(1, 2)$

Solución. La ecuación de la tangente que pasa por T es : $y - 2 = m(x - 1)$ (1)

de donde despejamos , $x = \frac{1}{m} (y + m - 2)$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$y^2 = \frac{4}{m} (y + m - 2) \Leftrightarrow my^2 - 4y + 4(2 - m) = 0$$

Para que haya tangencia : $(-4)^2 - 4m(4)(2 - m) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Luego, en (1), la ecuación de la tangente es , $y - 2 = 1(x - 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x - y + 1 = 0$

Ecuación de la normal : $y - 2 = -1(x - 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: x + y - 3 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left| \frac{y_1}{m} \right| \sqrt{1 + m^2}$, $\Rightarrow t = 2\sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}$

Longitud de la normal : $n = \left| y_1 \right| \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow n = 2\sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}$

Longitud de la subtangente : $|\overline{ST}| = \left| \frac{y_1}{m} \right| = 2$

Longitud de la subnormal : $|\overline{SN}| = |m y_1| = |1(2)| = 2$

2 $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$, $T(-6, 3)$

Solución. Ecuación de la tangente : $y - 3 = m(x + 6) \Leftrightarrow x = \frac{1}{m} (y - 6m - 3)$

valor que sustituido en la ecuación de la parábola nos da

$$y^2 + \frac{4}{m} (y - 6m - 3) + 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow my^2 + 2(2 + m)y + (-12 - 15m) = 0$$

Por la condición de tangencia : $4(2 + m)^2 - 4m(-12 - 15m) = 0$

de donde se obtiene : $(2m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1/2$

Ecuación de la tangente : $y - 3 = -\frac{1}{2} (x + 6) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x + 2y = 0$

Ecuación de la normal: $y - 3 = 2(x + 6) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: 2x - y + 15 = 0$

Longitud de la tangente: $t = \left| \frac{y_1}{m} \right| \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow t = \left| \frac{3}{-1/2} \right| \sqrt{1 + 1/4} = 3\sqrt{5}$

Longitud de la normal: $n = |y_1| \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow n = 3 \sqrt{1 + 1/4} = 3 \sqrt{5/2}$

Longitud de la subtangente: $|\overline{ST}| = \left| \frac{y_1}{m} \right| = \left| \frac{3}{-1/2} \right| = 6$

Longitud de la subnormal: $|\overline{SN}| = |m y_1| = |(-1/2)(3)| = 3/2$ ■

3 $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$, $T(-2, -1)$

Solución. Ecuación de la tangente: $y + 1 = m(x + 2) \Rightarrow y = mx + 2m - 1$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se obtiene:

$$x^2 - 6x + 5(mx + 2m - 1) - 11 = 0 \Rightarrow x^2 + (5m - 6)x + 10m - 16 = 0$$

Por condición de tangencia: $(5m - 6)^2 - 4(1)(10m - 16) = 0 \Rightarrow m = 2$

Ecuación de la tangente: $y + 1 = 2(x + 2) \Leftrightarrow \mathcal{L}: 2x - y + 3 = 0$

Ecuación de la normal: $y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: x + 2y + 4 = 0$

Longitud de la tangente: $t = \left| \frac{y_1}{m} \right| \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow t = \left| \frac{-1}{2} \right| \sqrt{1 + 4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Longitud de la normal: $n = |y_1| \sqrt{1 + m^2} = |-1| \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Longitud de la subtangente: $|\overline{ST}| = \left| \frac{y_1}{m} \right| = \left| \frac{-1}{2} \right| = \frac{1}{2}$

Longitud de la subnormal: $|\overline{SN}| = |m y_1| = |2(-1)| = 2$ ■

4 Por medio del Teorema 6.4, hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 4x = 0$ en el punto $T(1, 2)$

Solución. Si $y^2 = 4x \Rightarrow 4p = 4 \Leftrightarrow p = 1$ y $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

Por el Teorema 6.4; la ecuación de la tangente en el punto $T(x_1, y_1)$ es

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \Rightarrow 2y = 2(x + 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x - y + 1 = 0$$
 ■

5 Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $\mathcal{L}: y_1 x + 2py = x_1 y_1 + 2py_1$

Demostración. En efecto, por el Teorema 6.5, la pendiente de la tangente en P_1

$m_t = \frac{y_1}{2x_1}$ es, entonces la pendiente de la normal será

$$m_n = -\frac{2x_1}{y_1}, \text{ y su ecuación: } y - y_1 = -\frac{2x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x + y_1y = (y_1)^2 + 2(x_1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Como } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Rightarrow 2x_1 = \frac{(y_1)^2}{2p}$$

$$\text{Sustituyendo este valor en (1) se tiene: } \frac{(y_1)^2}{2p}x + y_1y = (y_1)^2 + \frac{(y_1)^2}{2p}x_1$$

$$\therefore y_1x + 2py = x_1y_1 + 2py_1$$

6 Por medio del resultado del Ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal a la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4x$ en el punto $T(1, 2)$

Solución. Si $y^2 = 4x \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$ y $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

Ahora, haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 5, se tiene

$$2x + 2y = (1)(2) + 2(1)(2) \Rightarrow \mathcal{L}: x + y - 3 = 0$$

7 Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre sí.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ cuyo foco tiene por coordenadas $F(p, 0)$

Como $LR = FR = 2p$, entonces las coordenadas de los extremos del lado recto son: $L(p, 2p)$ y $R(p_1 - 2p)$

Por el Teorema 6.4, las ecuaciones de las tangentes en L y R son:

$$2py = 2p(x + p) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: y = x + p \Leftrightarrow m_1 = 1$$

$$-2py = 2p(x + p) \Leftrightarrow \mathcal{L}_2: y = -x - p \Leftrightarrow m_2 = -1$$

Dado que $m_1 \cdot m_2 = -1$, las tangentes de L y R son perpendiculares entre sí.

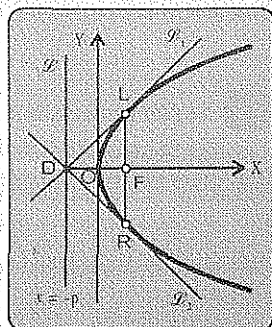


FIGURA 6.12

- 8** Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del Ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el Ejercicio 19 del grupo 23.)

Demostración. En efecto, refiriéndonos a la parábola de la Figura 6.12

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (y = x + p) \cap (y = -x - p) = D(-p, 0)$$

y dado que la ecuación de la directriz es $\mathcal{L}: x + p = 0$, por lo tanto

$$D \in \mathcal{L}$$

- 9** Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$

Solución. Si $y^2 = 8x \Leftrightarrow 4p = 8 \Leftrightarrow p = 2$

Por el Teorema 6.5, la ecuación de la tangente es $y = mx + \frac{p}{m}$

Por lo que, $y = -x + \frac{2}{-1} \Leftrightarrow \mathcal{L}: x + y + 2 = 0$

- 10** Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $\mathcal{L}: 3x + 9x - 11 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas paralelas a \mathcal{L} es

$$x + 3y + k = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x + k) \quad (1)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola nos da

$$x^2 + 4x - 4(x + k) - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4k - 8 = 0$$

Por condición de tangencia $(0)^2 - 4(1)(-4k - 8) = 0 \Leftrightarrow k = -2$

En consecuencia, por (1), la ecuación de la tangente es: $x + 3y - 2 = 0$

- 11** Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $\mathcal{L}: 2x + y + 7$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a \mathcal{L} , es

$$x - 2y + k = 0 \Leftrightarrow x = 2y - k \quad (1)$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola se tiene:

$$y^2 - 2(2y - k) + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 2k + 3 = 0$$

Condición de tangencia: $(-2)^2 - 4(1)(2k + 3) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Por lo tanto, en (1), la ecuación de la tangente buscada es: $x - 2y - 1 = 0$

- 12** Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(-3, 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por P es

$$y - 3 = m(x + 3) \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}(y - 3 - 3m) \quad (1)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene :

$$y^2 - \frac{3}{m}(y - 3 - 3m) - 8y + 10 = 0 \Leftrightarrow my^2 - (3 + 8m)y + 9 + 19m = 0$$

Por condición de tangencia : $(3 + 8m)^2 - 4m(9 + 19m) = 0$

Esta ecuación se reduce a : $4m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 3/2 \vee m_2 = -1/2$

Por tanto , en (1) , las ecuaciones de las tangentes buscadas son :

$$\mathcal{L}_1 : 3x - 2y + 15 = 0 \vee \mathcal{L}_2 : x + 2y - 3 = 0 \quad \blacksquare$$

- 13** Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(1, 4)$ a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$

La solución es similar a la del Ejercicio 12. Se deja a cargo del lector.

$$\text{Sol. } \mathcal{L}_1 : 3x - 2y + 5 = 0, \mathcal{L}_2 : x + 2y - 9 = 0$$

- 14** Del punto $P(-1, 1)$, se trazan dos tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto P es

$$y + 1 = m(x + 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}(y + 1 - m)$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola se tiene :

$$y^2 - \frac{1}{m}(y + 1 - m) + 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow my^2 + (4m + 1)y + 7m - 1 = 0$$

Para que haya tangencia : $(4m + 1)^2 - 4m(7m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1/2 \vee m_2 = 1/6$$

$$\text{Luego, si } \text{Tg}\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = \left| \frac{1/6 + 1/2}{1 - 1/12} \right| = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \theta = 36^\circ 2' \quad \blacksquare$$

- 15** Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$

a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes,

- b) son tangentes a la parábola,
c) no cortan a la parábola.

Solución. Si $x = -2y - k$, sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene

$$y^2 - 2(-2y - k) + 6y + 9 = 0 \Rightarrow y^2 + 10y + 2k + 9 = 0$$

El discriminante de esta ecuación es: $\Delta = (10)^2 - 4(2k + 9) = 8(8 - k)$

- a) Ocurre cuando $\Delta > 0$, esto es, si $8 - k > 0 \Leftrightarrow k \in \langle -\infty, 8 \rangle$
b) Sucede cuando $\Delta = 0$, es decir, si $8 - k = 0 \Leftrightarrow k = 8$
c) Ocurre cuando $\Delta < 0$, esto es, si $8 - k < 0 \Leftrightarrow k \in \langle 8, +\infty \rangle$ ■

16 Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $\mathcal{L}: x - y - 4 = 0$ y la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 2x$ en cada uno de los puntos de intersección.

Solución. De la ecuación de la parábola: $4p = 2 \Rightarrow p = 1/2$

$$(\mathcal{L}: x - y - 4 = 0) \cap (\mathcal{P}: y^2 = 2x) = P_1(8, 4) \text{ y } P_2(2, -2)$$

Por el Teorema 6.4, la ecuación de la tangente es: $y_1 y = 2p(x + x_1)$

Para el punto $P_1(8, 4)$: $4y = 2(1/2)(x + 8) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow m_1 = 1/4$

Para el punto $P_2(2, -2)$: $-2y = 2(1/2)(x + 2) \Leftrightarrow \mathcal{L}_2: x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -1/2$

Por lo tanto, el ángulo formado por \mathcal{L} y \mathcal{L}_1 es:

$$\operatorname{Tg} \theta_1 = \left| \frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1} \right| = \left| \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} \right| = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ 58'$$

y el ángulo agudo formado por \mathcal{L} y \mathcal{L}_2 es:

$$\operatorname{Tg} \theta_2 = \left| \frac{m - m_2}{1 + m \cdot m_2} \right| = \left| \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} \right| = 3 \Rightarrow \theta_2 = 71^\circ 34'$$
 ■

17 Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus puntos de intersección.

Solución. $(x^2 + y^2 = 25) \cap (x^2 - 4y - 4 = 0) = P_1(4, 3) \text{ y } P_2(-4, 3)$

La ecuación de la tangente a la parábola que pasa por P_1 , es

$$y - 3 = m(x - 4) \Leftrightarrow y = mx + 3 - 4m$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene:

$$x^2 - 4(mx + 3 - 4m) - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 16(m - 1) = 0$$

Por condición de tangencia: $(4m)^2 - 4(16)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2$

La ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto $P_1(x_1, y_1)$ es

$x \cdot x + y \cdot y = r^2$ (Ver Ejercicio 10. Grupo 18)

Entonces para la circunferencia dada, la ecuación de la tangente en $P(4, 3)$ es

$$4x + 3y = 25 \Rightarrow m_2 = -4/3$$

Por tanto, si $\text{Tg}\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left| \frac{2 + 4/3}{1 - 8/3} \right| = 2 \Rightarrow \theta = 63^\circ 26'$ ■

18 Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre sí en cada uno de sus puntos de intersección.

La demostración se deja para el lector. (Sugerencia: Halle las ecuaciones de las tangentes en los puntos de intersección y compruebe que son perpendiculares.)

19 Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$

Por el Teorema 6.4, la ecuación de la tangente en $P(x_1, y_1)$ es, $\mathcal{L}: y_1 y = 2p(x + x_1)$ (1)

y que tiene pendiente: $m = \frac{2p}{y_1}$

La ecuación de la recta perpendicular a \mathcal{L} que pasa por el foco $F(p, 0)$ es

$$\mathcal{L}_1: y = -\frac{y_1}{2p}(x - p)$$

Sustituyendo este valor de y en (1) se tiene:

$$-\frac{(y_1)^2}{2p}(x - p) = 2p(x + x_1) \Leftrightarrow (y_1^2 + 4p^2)x = p(y_1^2 - 4px_1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_1^2 = 4px_1$; luego, $(y_1^2 + 4p^2)x = p(0) = 0$

Dado que $y_1^2 + 4p^2 \neq 0 \Rightarrow x = 0$, que es precisamente la ecuación de la tangente en el vértice de la parábola. Por tanto, $P \in (\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_1)$ está sobre dicha tangente. ■

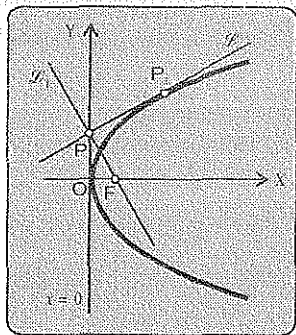


FIGURA 6.13

20 Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ tiene por ecuación: $y = mx - 2pm - pm^3$

Demostración. Por el Teorema 6.4, la pendiente de la tangente a la parábola \mathcal{P} en el

$$\text{punto } P_1(x_1, y_1) \text{ es: } m_t = \frac{2p}{y_1}$$

Entonces, la ecuación de la normal en P_1 es:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2p} (x - x_1) \Leftrightarrow y = -\frac{y_1}{2p} x + y_1 + \frac{x_1 y_1}{2p} \quad (1)$$

$$\text{Como } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_1^2 = 4px_1, \text{ de donde: } x_1 = \frac{(y_1)^2}{4p}$$

$$\text{Sustituyendo este valor en (1) se tiene: } y = -\frac{y_1}{2p} x + y_1 + \frac{(y_1)^3}{8p^2}$$

$$\text{y dado que } m = -\frac{y_1}{2p}, \text{ entonces: } y = mx - 2pm - pm^3 \quad \blacksquare$$

21 Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

Demostración. Sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$, y sean

A y B los puntos de intersección de la tangente con el lado recto (prolongado) y la directriz, respectivamente. Por el Teorema 6.4, la ecuación de la tangente en $P_1(x_1, y_1)$ es: $y_1 y = 2p(x + x_1)$

Para $x = p$ (ecuación del lado recto), se tiene:

$$y = \frac{2p}{y_1} (p + x_1)$$

Luego, A tiene por coordenadas: $\left(p, \frac{2p}{y_1} (p + x_1)\right)$

Para $x = -p$ (ecuación de la directriz) obtenemos

$$y = \frac{2p}{y_1} (x_1 - p)$$

Entonces, las coordenadas de B son: $\left(-p, \frac{2p}{y_1} (x_1 - p)\right)$

La longitud de \overline{AF} es la ordenada de A, esto es: $|\overline{AF}| = \left| \frac{2p}{y_1} (x_1 + p) \right| \quad (1)$

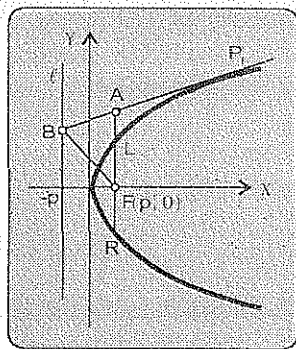


FIGURA 6.14

$$|\overline{BF}| = \sqrt{(p+p)^2 + \frac{4p^2}{y_1^2} (x_1 - p)^2} = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2} [y_1^2 + (x_1 - p)^2]}$$

$$\text{Dado que } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow y_1^2 = 4px_1$$

$$\Rightarrow |\overline{BF}| = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2} [4px_1 + (x_1 - p)^2]} = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2} (x_1 + p)^2} = \left| \frac{2p}{y_1} (x_1 + p) \right| \quad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2), se deduce que: $|\overline{AF}| = |\overline{BF}|$

- 22** En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

Demostración. En efecto, la ecuación de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \quad (\text{Teorema 6.4})$$

$$\text{Para } y=0 \Rightarrow 2p(x+x_1)=0 \Rightarrow x=-x_1$$

Luego $A(-x_1, 0)$ y como $Q(x_1, 0)$, entonces

$$\overline{AO} = \overline{OQ} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{AO} + \overline{OQ} = 2\overline{AO} \quad (1)$$

Longitud de la subnormal: $\overline{QB} = |my_1|$

$$\text{Dado que, } m = \frac{2p}{y_1} \Rightarrow \overline{QB} = 2p \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$\overline{AQ} + \overline{QB} = 2(\overline{AO} + p) \Rightarrow \overline{AB} = 2(\overline{AO} + \overline{OF}) = 2\overline{AF}$$

Esto es, $|\overline{AF}| = |\overline{FB}|$; además, por el Ejercicio 15, Grupo 23:

$$r = |\overline{PF}| = |x_1 + p| \Rightarrow |\overline{PF}| = |\overline{OQ} + \overline{OF}| = |\overline{AO} + \overline{OF}| = |\overline{AF}|$$

$$\therefore |\overline{AF}| = |\overline{FB}| = |\overline{FP}|$$

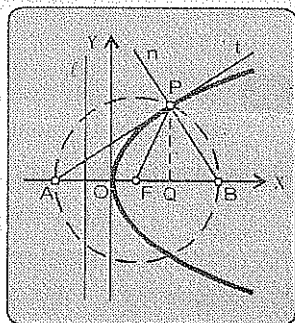


FIGURA 6.15

- 23** Por medio del resultado del Ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de la parábola dada.

Solución. La demostración del procedimiento se muestra en la Figura 6.15, y consiste en trazar una circunferencia de radio $r = \overline{PF}$, que intercepte al eje X en los puntos A y B. Uniendo estos puntos con el punto P de tangencia obtendremos las gráficas de la tangente y normal respectivamente.

- 24** Demostrar que la tangente a la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, de pendiente m , tiene por ecuación : $y = mx - mh + k + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$.

Demostración. En efecto, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen $O'(h, k)$, la ecuación dada se transforma en : $y'^2 = 4px'$

Por el Teorema 6.5, la ecuación de la tangente, de pendiente m , es :

$$y' = mx' + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0 \quad (1)$$

y por las ecuaciones de traslación : $x = x' + h \Rightarrow x' = x - h$

$$y = y' + k \Rightarrow y' = y - k$$

Si sustituimos estos valores de x' e y' en (1) obtenemos

$$y - k = m(x - h) + \frac{p}{m} \Leftrightarrow y = mx - mh + k + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0 \quad \blacksquare$$

- 25** Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

Demostración. Sea la parábola $y^2 = 4px$, y sean $P_1(x_1, y_1)$,

$P_2(x_2, y_2)$ los extremos de la cuerda focal

$\overline{P_1P_2}$ y $C(h, k)$ el centro de la circunferencia de radio r .

Probaremos que : $r = \overline{DC} = h + p$

En efecto, los puntos A, B y D tienen por abscisa, $x = -p$

$$\Rightarrow \overline{AP_1} = x_1 - (-p) = x_1 + p$$

$$\overline{BP_2} = x_2 - (-p) = x_2 + p$$

Sumando ambos miembros de estas dos igualdades se tiene :

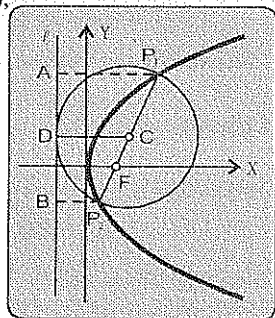


FIGURA 6.16

$$\overline{AP_1} + \overline{BP_2} = x_1 + x_2 + 2p \Rightarrow \frac{1}{2}(\overline{AP_1} + \overline{BP_2}) = \frac{x_1 + x_2}{2} + p$$

Como el centro $C(h, k)$ biseca al segmento $\overline{P_1P_2} \Rightarrow h = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Luego, $\overline{DC} = h + p = r$. Por lo tanto, la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola. ■

- 27** Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de

recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P para esa parábola. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrase que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Demostración. Sean los puntos de tangencia :

$$P(x_2, y_2) \text{ y } Q(x_3, y_3)$$

Por el Teorema 6.4, la ecuación de tangente \mathcal{D}_1 es

$$y_2 y = 2p(x + x_2) \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 : 2px - y_2 y + 2px_2 = 0$$

y la ecuación de la tangente \mathcal{D}_2 es

$$y_3 y = 2p(x + x_3) \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 : 2px - y_3 y + 2px_3 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas que pasan por P_1 son :

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow \mathcal{D}'_1 : m_1 x - y + y_1 - m_1 x_1 = 0$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Leftrightarrow \mathcal{D}'_2 : m_2 x - y + y_1 - m_2 x_1 = 0$$

$$\text{Como } \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 \Rightarrow \frac{2p}{m_1} = \frac{y_2}{1} = \frac{2px_2}{y_1 - m_1 x_1} \Rightarrow y_2 = \frac{2p}{m_1} \text{ y } x_2 = \frac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_2 \Rightarrow \frac{2p}{m_2} = \frac{y_3}{1} = \frac{2px_3}{y_1 - m_2 x_1} \Rightarrow y_3 = \frac{2p}{m_2} \text{ y } x_3 = \frac{y_1 - m_2 x_1}{m_2}$$

$$\text{Por lo que : } P\left(\frac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}, \frac{2p}{m_1}\right) \text{ y } Q\left(\frac{y_1 - m_2 x_1}{m_2}, \frac{2p}{m_2}\right)$$

$$\text{Pendiente de la cuerda } \overline{PQ} : m = \frac{\frac{2p}{m_2} - \frac{2p}{m_1}}{\frac{y_1 - m_2 x_1}{m_2} - \frac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}} = \frac{2p}{y_1}$$

$$\text{Ecuación de } \overline{PQ} : y - y_2 = \frac{2p}{y_1} (x - x_2) \Leftrightarrow \mathcal{D} : y_1 y = 2px + y_1 y_2 - 2px_2 \quad (1)$$

$$\text{Dado que } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{D} \Rightarrow y_2 y_1 = 2p(x_1 + x_2) \Rightarrow y_1 y_2 - 2px_2 = 2px_1 \quad (2)$$

Finalmente, sustituyendo el valor de (2) en (1) obtenemos

$$\mathcal{D} : y_1 y = 2p(x + x_1)$$

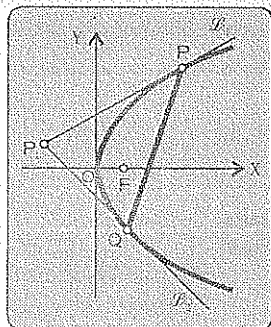


FIGURA 6.17

23 Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

Demostración. En efecto, sea la parábola $y^2 = 4px$, cuyo foco es $F(p, 0)$ y directriz $\ell : x = -p$

Si $P_1 \in \ell \Rightarrow P_1(-p, y_1)$. Por la fórmula del Ejercicio 27, la ecuación de la cuerda de contacto \overline{PQ} es

$$y_1 y = 2p(x - p)$$

Si $y=0 \Rightarrow 2p(x-p)=0$, como $p \neq 0 \Rightarrow x-p=0 \Leftrightarrow x=p$, hemos obtenido la abscisa del foco.

Por lo tanto, la cuerda de contacto \overline{PQ} pasa por el foco. ■

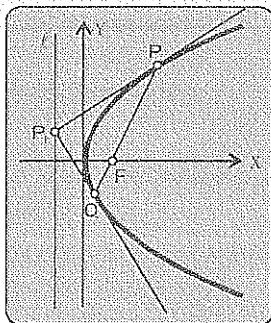


FIGURA 6.18

29 Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

Demostración. En efecto sea la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ y sea

$P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

La familia de cuerdas paralelas está representada por la

ecuación: $y = mx + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}(y - b)$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola

se tiene: $y^2 = \frac{4p}{m}(y - b) \Rightarrow my^2 - 4py + 4bp = 0$

La suma de las raíces de esta ecuación es:

$$y_1 + y_2 = \frac{4p}{m} \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2p}{m} \quad (\text{constante})$$

Por lo tanto, $y = \frac{2p}{m}$ es la ecuación del diámetro de la parábola y es paralela al eje X . ■

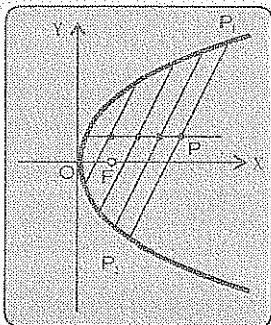


FIGURA 6.19

30 Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

Solución. Si $y^2 = 16x \Rightarrow 4p = 16 \Leftrightarrow p = 4$

Por la fórmula del Ejercicio 29, la ecuación del diámetro de la parábola es:

$$y = \frac{2p}{m} \Rightarrow y = \frac{2(4)}{2} \Leftrightarrow y = 4$$

EJERCICIOS DE REPASO

(Texto : F. J. De La Borbolla)

- 1** Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(5, 0)$, lado recto, $LR = 12$, y el eje coincide con el eje X .

Solución. La forma típica de la ecuación es : $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ (1)

$$\text{Si } LR = |4p| = 12 \Leftrightarrow p_1 = 3 \vee p_2 = -3$$

$$F(5, 0) = F(h + p, k) \Leftrightarrow k = 0 \wedge h + p = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} h + 3 = 5 \Leftrightarrow h_1 = 2 \\ h - 3 = 5 \Leftrightarrow h_2 = 8 \end{cases}$$

Luego en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathcal{P}_1 : (y - 0)^2 = 12(x - 2) \vee \mathcal{P}_2 : (y - 0)^2 = -12(x - 8)$$

- 2** Hallar la ecuación de la parábola sabiendo que : $LR = 4$, pasa por $Q(-1, -2)$, eje paralelo al eje X , vértice sobre la recta $\mathcal{P} : x = 3$.

Solución. Forma típica de la ecuación de la parábola, $\mathcal{P} : (y - k)^2 = 4p(x - h)$

$$\text{Si } V(h, k) \in \mathcal{P} : x = 3 \Leftrightarrow h = 3 \Leftrightarrow \mathcal{P} : (y - k)^2 = 4p(x - 3)$$

$$\text{Si } Q(-1, -2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (-2 - k)^2 = 4p(-1 - 3) \Leftrightarrow (k + 2)^2 = -16p \quad (1)$$

$$\text{Como } LR = 4 \Leftrightarrow |4p| = 4 \Leftrightarrow p = 1 \vee p = -1$$

Está claro que la segunda alternativa satisface la ecuación (1), luego, si

$$p = -1 \Leftrightarrow (k + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow k_1 = 2 \vee k_2 = -6$$

Por tanto, las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathcal{P}_1 : (y - 2)^2 = -4(x - 3) \vee \mathcal{P}_2 : (y + 6)^2 = -4(x - 3)$$

- 3** Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y , y que pasa por los puntos $A(-6, -1)$, $B(-2, -1)$ y $C(0, 5)$

$$\text{Solución. Sea la parábola } \mathcal{P} : x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

$$\text{Si } A(-6, -1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 36 - 6D - E + F = 0 \quad (2)$$

$$B(-2, -1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4 - 2D - E + F = 0 \quad (3)$$

$$C(0, 5) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 + 0 + 5E + F = 0 \Leftrightarrow F = -5E \quad (4)$$

$$\text{Restando (2) - (3) se tiene : } 32 - 4D = 0 \Leftrightarrow D = 8$$

$$\text{Restando (3) - (4) obtenemos : } 4 - 2D - 6E = 0, \text{ de donde } E = -2 \Leftrightarrow F = 10$$

$$\text{Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es, } \mathcal{P} : x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$$

- 4** Dados, el foco $F(0, 0)$, y la directriz $\ell: x + y + 4 = 0$; obtener la ecuación de la parábola y los demás elementos.

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola.

En cualquier posición de P se debe verifi-

$$\text{car que: } |\overline{PF}| = |d(P, \ell)| \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{|x + y + 4|}{\sqrt{2}}$$

de donde obtenemos, $\mathcal{P}: x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y - 16 = 0$

Como el eje es perpendicular a la directriz y pasa por $F(0, 0)$, su ecuación es, $\mathcal{L}: y = x$

$$\Rightarrow \ell \cap \mathcal{L} = D(-2, -2)$$

El vértice es punto medio de $\overline{FD} \Rightarrow V(-1, -1)$

$$p = |\overline{VF}| = \sqrt{(0+1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow LR = |4p| = 4\sqrt{2}$$

Dado que el lado recto es paralelo a la directriz, su ecuación es $\mathcal{L}_1: y = -x$

$$\therefore (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{P}) = L(-2, 2) \text{ y } R(2, -2)$$

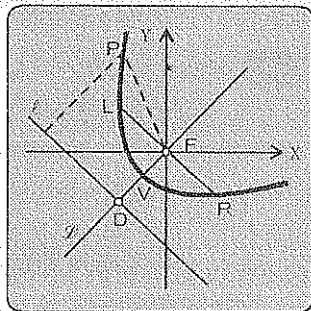


FIGURA 6.20

- 5** Obtener la ecuación de la parábola si se conocen: Foco $F(5, 1)$ y vértice $V(3, 2)$. Hallar también los demás elementos de la parábola.

Solución. Sea $D(x_1, y_1)$ el punto de intersección de la directriz ℓ y eje \mathcal{L} . Como V biseca el segmento \overline{FD} , entonces

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \frac{1}{2}(x_1 + 5) \Leftrightarrow x_1 = 1 \\ 2 &= \frac{1}{2}(y_1 + 1) \Leftrightarrow y_1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(1, 3)$$

$$\text{Pendiente de } \overline{VF}: m = \frac{1-2}{5-3} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación de la directriz:

$$y - 3 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \ell: 2x - y + 1 = 0$$

Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la parábola, entonces por definición:

$$|\overline{PF}| = |d(P, \ell)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \mathcal{P}: x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$$

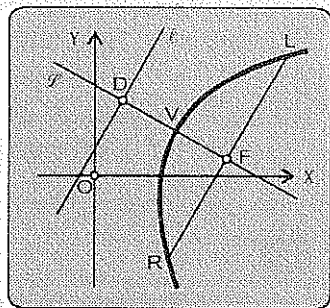


FIGURA 6.21

$$p = |\overline{VF}| = \sqrt{(5-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow LR = |4p| = 4\sqrt{5}$$

Ecuación del eje : $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x + 2y - 7 = 0$

Ecuación del lado recto, paralelo a $\ell: y - 1 = 2(x - 5) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: 2x - y - 9 = 0$

Extremos del lado recto : $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{P}) = L(7, 5) \text{ y } R(3, -3)$

6 Una parábola pasa por A(-2, 4) y B(8, -1). Su directriz es $\ell: y + 6 = 0$. Cuál es su ecuación? (Dos soluciones.)

Solución. Forma típica de la ecuación buscada

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (1)$$

Si F(x, y) es el foco, entonces por definición :

$$|\overline{AF}| = |d(A, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = |4+6|$$

$$\text{de donde : } x^2 + y^2 + 4x - 8y - 80 = 0 \quad (2)$$

$$|\overline{BF}| = |d(B, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y+1)^2} = |-1+6|$$

$$\text{de donde : } x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo (2) y (3) obtenemos :

$$F_1(4, -4) \text{ y } F_2(8, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } F(h, k+p) = F_1(4, -4) \Rightarrow h_1 = 4, k_1 + p_1 = -4 \\ \text{Ecuación de la directriz, } \ell: y = k - p \Rightarrow k_1 - p_1 = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = -5 \wedge p_1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } F(h, k+p) = F_2(8, 4) \Rightarrow h_2 = 8, k_2 + p_2 = 4 \\ \text{De la ecuación de la directriz: } k_2 - p_2 = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow k_2 = -1 \wedge p_2 = 5$$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathcal{P}_1: (x-4)^2 = 4(y+5) \vee \mathcal{P}_2: (x-8)^2 = 20(y+1)$$

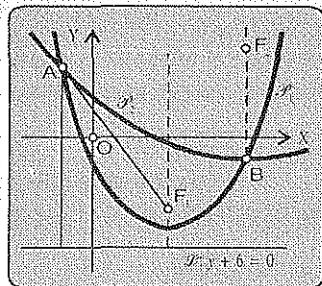


FIGURA 6.22

7 Una parábola pasa por P(7, 3) y Q(-1, -5). Su foco es F(11, 0). Cuál es su ecuación? (Dos soluciones.)

Solución. Debemos considerar las dos formas de la ecuación de la parábola

Caso 1. Forma típica, $\mathcal{P}_1: (y - k)^2 = 4p(x - h)$ (1)

Ecuación de la directriz, $\ell_1: x = h - p$

Un punto sobre ℓ_1 , a la misma altura que P es D₁(h - p, 3). Entonces por definición de

parábola

$$|\overline{PD}_1| = |\overline{PF}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(h-p-7)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (h-p-7)^2 = 25 \Leftrightarrow h-p = 7 \pm 5$$

$$\text{Si } F(h+p, k) = F(11, 0) \Leftrightarrow k=0 \text{ y } h+p=11$$

La solución común de $(h-p=12) \wedge (h+p=11)$ es:

$$h=23/2 \wedge p=-1/2$$

y la solución común de $(h-p=2) \wedge (h+p=11)$ es:

$$h=13/2 \wedge p=9/2$$

Como $p < 0$ (la parábola se abre hacia la izquierda) descartamos la segunda solución.

Por tanto, en (1), la primera solución es, $\mathcal{P}_1: (y-0)^2 = -2(x-23/2)$

Caso 2. Forma típica, $\mathcal{P}_2: (x-h)^2 = 4p(y-k)$ (2)

Ecuación de la directriz, $\ell_2: y = k-p$

Un punto sobre ℓ_2 , en la misma línea de Q es $D_2(-1, k-p)$

Luego, si $|\overline{QD}_2| = |\overline{QF}| \Leftrightarrow \sqrt{(-1+1)^2 + (k-p+5)^2} = \sqrt{(11+1)^2 + (0+5)^2}$

$$\Leftrightarrow (k-p+5)^2 = 169 \Leftrightarrow k-p = -5 \pm 13$$

$$\text{Si } F(h, k+p) = F(11, 9) \Leftrightarrow h=11 \text{ y } k+p=0$$

La solución común de $(k+p=0) \wedge (k-p=8)$ es: $k=4 \wedge p=-4$

y la solución común de $(k+p=0) \wedge (k-p=-18)$ es: $k=-9 \wedge p=9$

Como $p < 0$ (la curva se abre hacia abajo), descartamos la segunda solución

Por lo tanto, en (2), la segunda solución es, $\mathcal{P}_2: (x-11)^2 = -6(y-4)$ ■

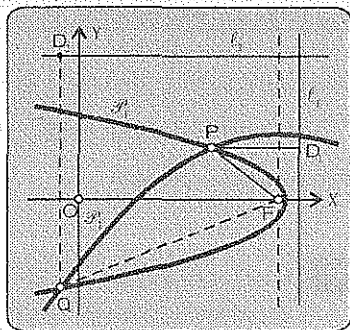


FIGURA 6.23

8 Una parábola pasa por $A(4, -2)$ y $B(-2, 4)$. Su tangente en el vértice V es la recta $\mathcal{P}: y+4=0$. Cual es su ecuación.

Solución. La forma típica de la ecuación es, $\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$ (1)

$$\text{Si } V(h, k) \in \mathcal{P}: y+4=0 \Leftrightarrow k+4=0$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

$$A(4, -2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (4-h)^2 = 4p(-2+4)$$

$$\Leftrightarrow (4-h)^2 = 8p \quad (2)$$

$$B(-2, 4) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (-2-h)^2 = 4p(4+4)$$

$$\Leftrightarrow (2+h)^2 = 32p \quad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3) se tiene:

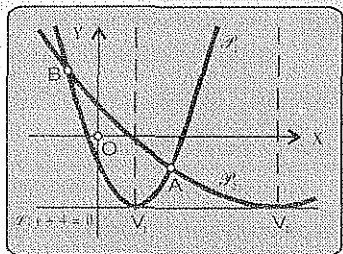


FIGURA 6.24

$$\frac{(4-h)^2}{(2+h)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow h_2 - 12h + 20 = 0 \Leftrightarrow h_1 = 2 \vee h_2 = 10$$

Para $h_1 = 2$, en (2) : $(4-2)^2 = 8p \Rightarrow h_1 = 1/2$

Si $h_2 = 10 \Rightarrow (4-10)^2 = 8p \Rightarrow p_2 = 9/2$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathcal{P}_1 : (x-2)^2 = 2(y+4) \vee \mathcal{P}_2 : (x-10)^2 = 18(y+4)$$

9 Si $L(-9, 3)$ y $R(-1, -5)$ son los extremos del lado recto, hallar la ecuación de la parábola. (Dos soluciones.)

Solución. Como el foco biseca al lado recto, entonces:

$$\text{ces : } F\left(\frac{-9-1}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \Leftrightarrow F(-5, -1)$$

$$\overline{LR} = |4p| = \sqrt{(-1+9)^2 + (-5-3)^2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

Ecuación del lado recto :

$$y-3 = \frac{-5-3}{-1+8}(x+9) \Rightarrow \overline{LR} : x+y+6=0$$

La ecuación de la familia de rectas paralelas a \overline{LR} es

$$\mathcal{L} : x+y+k=0 \quad (1)$$

$$\text{Si } d(F, \mathcal{L}) = 2p \Rightarrow \frac{|-5-1+k|}{\sqrt{2}} = 2(2\sqrt{2}) \Rightarrow |k-6| = 8 \Leftrightarrow k-6=8 \vee k-6=-8 \\ \Leftrightarrow k_1 = 14 \vee k_2 = -2$$

Sustituyendo estos valores de k en (1), obtenemos las ecuaciones de las directrices

$$\mathcal{L}_1 : x+y+14=0 \vee \mathcal{L}_2 : x+y-2=0$$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición

$$|\overline{PF}| = |d(P_1, \mathcal{L}_1)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x+y+14|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_1 : x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 24y - 144 = 0$$

$$\text{También : } |\overline{PF}| = |d(P_2, \mathcal{L}_2)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2 : x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$$

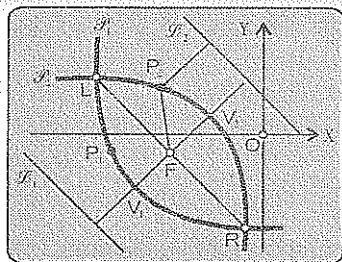


FIGURA 6.25

- 10** Hallar la ecuación de la parábola que pasa por el punto $A(7, 5)$, cuya directriz es $\ell: 2x - y + 1 = 0$ y la tangente en el vértice es $\mathcal{L}: 2x - y - 4 = 0$

Solución. La distancia entre las rectas paralelas ℓ y \mathcal{L} es:

$$p = \frac{|1 - (-4)|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

y si

$$d(A, \ell) = \frac{|2(7) - 5 + 1|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow d(A, \ell) = 2d(\ell, \mathcal{L})$$

Por lo que el punto A se halla en la recta $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}$, cuya ecuación es: $y - 5 = 2(x - 7) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: 2x - y - 9 = 0$

La familia de rectas perpendiculares a \mathcal{L}_1 está dada por la ecuación, $\mathcal{L}_2: x + 2y + k = 0$ (1)

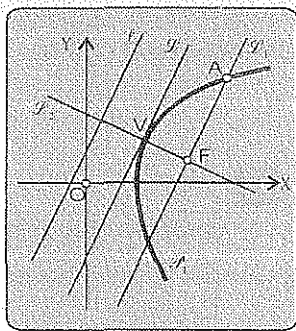


FIGURA 6.26

$$\begin{aligned} \text{Como la } d(A, \mathcal{L}_2) &= 2p \Rightarrow \frac{|7 + 2(5) + k|}{\sqrt{1+4}} \\ &\Rightarrow |k + 17| = 10 \Leftrightarrow k + 17 = 10 \vee k + 17 = -10 \\ &\Leftrightarrow k_1 = -7 \vee k_2 = -27 \end{aligned}$$

Entonces, en (1), se tiene, $\mathcal{L}_2: x + 2y - 7 = 0 \vee \mathcal{L}_3: x + 2y - 27 = 0$

Luego: $(\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1) = F_1(5, 1)$ y $(\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_1) = F_2(9, 9)$

Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la parábola, entonces

$$\begin{aligned} |\overline{PF}_1| &= |d(P, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{4+1}} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}_1: x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{PF}_2| &= |d(P, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x-9)^2 + (y-9)^2} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}_2: x^2 + 4xy + 4y^2 - 94x - 88y + 809 = 0 \end{aligned}$$

- 11** Qué ángulo debe formar la cuerda que pasa por el foco de la parábola $y^2 = 5x$ con su eje, para que la longitud de la cuerda sea 4 veces la del lado recto.

Solución. Si $y^2 = 5x \Rightarrow p = 5/4 \Rightarrow F(5/4, 0)$

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de la cuerda focal. Luego por definición de parábola

$$\overline{P_1F} = \overline{P_1D_1} = x_1 - (-p) = x_1 + p$$

$$\overline{P_2F} = \overline{P_2D_2} = x_2 - (-p) = x_2 + p$$

$$\Rightarrow \overline{P_1F} + \overline{P_2F} = \overline{P_1P_2} = (x_1 + x_2) + 2p$$

De la condición del problema, se sigue que :

$$\overline{P_1P_2} = 4\overline{LR} \Rightarrow (x_1 + x_2) + 2p = 4(4p)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 14p \Rightarrow x_1 + x_2 = 35/2 \quad (1)$$

Ecuación de la cuerda : $y = m(x - 5/4)$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene :

$$(mx - 5m/4)^2 = 5x \Rightarrow 16m^2x^2 - 40(m^2 + 2)x + 25m^2 = 0$$

La suma de las raíces de esta ecuación es :

$$x_1 + x_2 = \frac{40(m^2 + 2)}{16m^2} = \frac{5(m^2 + 2)}{2m^2}$$

Luego, en (1): $\frac{5(m^2 + 2)}{2m^2} = \frac{35}{2}$, de donde obtenemos $m^2 = 1/3 \Rightarrow m = \sqrt{3}/3$

Dado que $m = \text{Tg}\alpha$, entonces si $\text{Tg}\alpha = \sqrt{3}/3 \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$

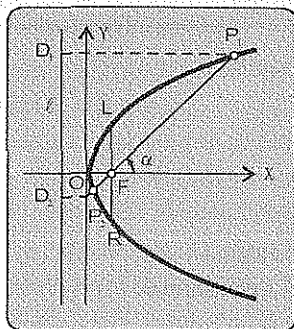


FIGURA 6.27

12 Por el foco de la parábola $y^2 = 4px$ pasa una cuerda que forma un ángulo de 60° con el eje. Qué relación hay entre la longitud de la cuerda y la del lado recto.

Solución. Las coordenadas del foco son $F(p, 0)$ y si la pendiente de la cuerda focal $\overline{P_1P_2}$ es $m = \text{Tg}60^\circ = \sqrt{3}$, su ecuación es :

$$y = \sqrt{3}(x - p)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene :

$$3(x - p)^2 = 4px \Rightarrow 3x^2 - 10px + 3p = 0$$

La suma de las raíces de esta ecuación es : $x_1 + x_2 = \frac{10p}{3}$

Como $\overline{P_1P_2} = (x_1 + x_2) + 2p$ (Ver Ejercicio 11)

$$\text{Entonces : } \overline{P_1P_2} = \frac{10p}{3} + 2p = \frac{16p}{3}$$

$$\therefore \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{LR}} = \frac{16p/3}{4p} = \frac{4}{3}$$

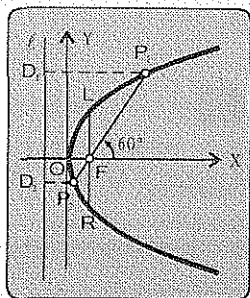


FIGURA 6.28

13 Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - x + 4y + 1 = 0$, sabiendo que

biseca a las cuerdas paralelas a la recta $\mathcal{L}_1: 5x + 4y = 0$

Solución. En el Ejercicio 29 del grupo 25, determinamos la ecuación del diámetro ($y = 2p/m$) para una parábola de la forma $y^2 = 4px$. Análogamente se puede demostrar que la ecuación del diámetro de la parábola de la forma $x^2 = 4py$, es $x = 2pm$, y de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ es, $x = 2pm + h$. En todos los casos m es la pendiente de las cuerdas paralelas.

Luego, si $\mathcal{L}_1: 5x + 4y = 0 \Rightarrow m_1 = m = -5/4$

La ecuación de la parábola en su forma ordinaria es $(x - 1/2)^2 = -4(y - 3/16)$ de donde:

$$h = 1/2 \quad y \quad 4p = -4 \Rightarrow p = -1$$

Por lo que, si $x = 2pm + h \Rightarrow x = 2(-1)(-5/4) + 1/2 \Leftrightarrow x = 3$, es la ecuación del diámetro de la parábola dada. ■

14 Si $M(3, 7)$ es el punto medio de una cuerda de la parábola $x^2 - 10x + 12y = 119$, hallar las ecuaciones del diámetro y la cuerda de dicha parábola.

Solución. Reduciendo la ecuación de la parábola a su forma ordinaria se tiene

$$(x - 5)^2 = -12(y - 12) \Rightarrow h = 5 \quad y \quad p = -3$$

Como el diámetro de la parábola es paralelo al eje Y , y pasa por $M(3, 7)$, su ecuación es $x = 3$.

Pero sabemos que $x = 2pm + h \Rightarrow 3 = 2(-3)m + 5 \Leftrightarrow m = 1/3$ es la pendiente de la cuerda, por lo que su ecuación es

$$y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x - 3y + 18 = 0 \quad \blacksquare$$

15 Cuál debe ser la pendiente de las cuerdas paralelas que son bisecadas por el diámetro $y = 1$, en la parábola $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$.

Solución. Si $y^2 + 2y = 4x + 7 \Rightarrow (y + 1)^2 = 4(x + 2) \Rightarrow k = -1 \quad y \quad p = 1$

Ecuación del diámetro: $y = \frac{2p}{m} + k \Rightarrow 1 = \frac{2}{m} - 1 \Leftrightarrow m = 1 \quad \blacksquare$

16 Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un haz de cuerdas que pasan por $A(8, 0)$ del eje de la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 8x$

Solución. 1. Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de una cuerda de la parábola dada, y sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica.

$$\overline{P_1 P} = \overline{P P_2}$$

2. Cuya expresión analítica es :

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad , \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

3. Si $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 8x_1$

$$P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_2)^2 = 8x_2$$

$$\Rightarrow (y_1)^2 - (y_2)^2 = 8(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 8(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow (2y) \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) = 8 \Leftrightarrow my = 4$$

Pero, dado que : $m = \frac{y-0}{x-8} \Rightarrow \left(\frac{y}{x-8} \right) y = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4x - 32$

El lugar geométrico es una parábola coaxial con la primera y con vértice en el punto $A(8, 0)$

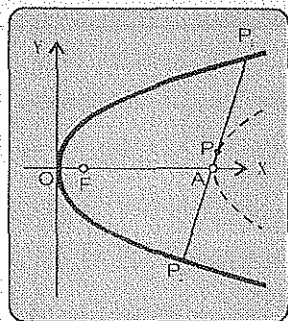


FIGURA 6.29

17 En qué punto del eje de la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 8x$ concurren las cuerdas que se ven desde el vértice bajo un ángulo de 90° .

Solución. La ecuación de la recta que contiene al segmento \overline{AV} es, $\mathcal{L}_1: y = mx$

Como $\overline{AV} \perp \overline{BV}$, la ecuación de \overline{BV} es, $\mathcal{L}_2: y = -\frac{1}{m}x$

Interceptando \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 con la parábola obtenemos :

$$A(8/m^2, 8/m) \text{ y } B(8m^2, -8m)$$

Pendiente de \overline{AB} : $m_1 = \frac{8/m + 8m}{8/m^2 - 8m^2} = \frac{m}{1 - m^2}$

Ecuación de \overline{AB} : $y + 8m = \frac{m}{1 - m^2}(x - 8m^2)$

Para $y = 0$, se tiene : $8m = \frac{m}{1 - m^2}(x - 8m^2)$, de donde $x = 8$

Por lo tanto, $P(8, 0)$ es el punto buscado

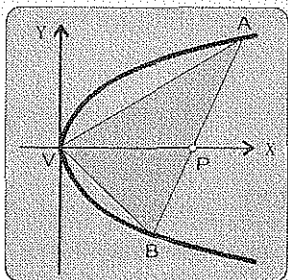


FIGURA 6.30

18 El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo L del lado recto de la parábola $y^2 = 8x$. El segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. Cuál es el tercer vértice del triángulo.

Solución. Designemos por $A(x, 0)$ las coordenadas del tercer vértice. Si $y^2 = 8x \Rightarrow p = 2$

Entonces las coordenadas del foco son : $F(2, 0)$

Como $|\overline{FL}| = 2p = 4 \Rightarrow L(2, 4)$

La pendiente de \overline{OL} es, $m_1 = \frac{4}{2} = 2$

Dado que $\overline{OL} \perp \overline{AL} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -1/2$

y si $m_2 = \frac{0-4}{x-2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-4}{x-2}$, de donde, $x = 10$. Por lo que : $A(10, 0)$ ■

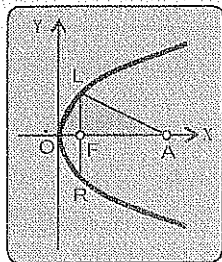


FIGURA 6.31

19 El vértice de la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ coincide con el de un triángulo equilátero. Los otros dos vértices del mismo se encuentran sobre la curva. Cuáles son?

Solución. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, -y_1)$ las coordenadas de los otros dos vértices.

La ecuación de \overline{OA} es : $y = (\text{Tg}30^\circ)x \Rightarrow y_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x_1$ (1)

Si $A(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 = 4px_1$

de donde obtenemos : $x_1 = 12p$.

Sustituyendo este valor en (1) se tiene : $y_1 = 4\sqrt{3}p$

$\therefore A(12p, 4\sqrt{3}p)$ y $B(12p, -4\sqrt{3}p)$ ■

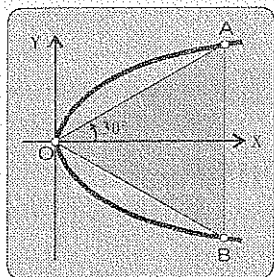


FIGURA 6.32

20 Qué lugar geométrico describe el centro de una circunferencia móvil tangente a la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 16$ y a la recta $\mathcal{L}: x = 8$?

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica $\overline{OP} = \overline{OT} + \overline{TP}$

Pero : $\overline{TP} = \overline{PD}$ (radios de la circunferencia móvil)

$$\Rightarrow \overline{OP} = \overline{OT} + \overline{PD}$$

2. La expresión analítica de esta propiedad es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + (8 - x) = 12 - x$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros y simplifi-

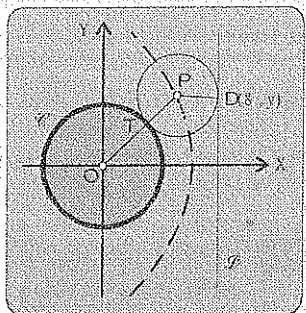


FIGURA 6.33

cando obtenemos la ecuación del lugar geométrico.

$$y^2 = -24(x-6)$$

- 21** Qué lugar geométrico describe un móvil M que equidista de una circunferencia fija y de un diámetro de la misma? La circunferencia fija es $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 36$, y el diámetro fijo, la recta $x = 0$

Solución. 1. Sea $M(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad

$$TM = |\overline{PM}|$$

$$\text{Dado que: } \overline{TM} = \overline{OM} - \overline{OT} \Rightarrow \overline{OM} - \overline{OT} = |\overline{PM}|$$

$$2. \text{ Expresión analítica: } \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = \pm x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \pm x$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos la ecuación del lugar geométrico

$$\mathcal{P}_1: y^2 = 12(x+3) \vee \mathcal{P}_2: y^2 = -12(x-3) \quad \blacksquare$$

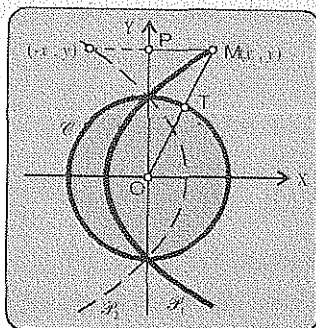


FIGURA 6.34

- 22** Hallar las tangentes comunes a la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 10x - 20 = 0$ y a la parábola $\mathcal{P}: y^2 = 20x$

Solución. Si $\mathcal{C}: (x+5)^2 + (y-0)^2 = 45 \Rightarrow C(-5, 0)$ y $r = 3\sqrt{5}$

$$\text{Ecuación de las tangentes buscadas: } y = mx + b \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene

$$(mx + b)^2 = 20x \Rightarrow m^2x^2 + 2(bm - 10)x + b^2 = 0$$

$$\text{Por condición de tangencia: } 4(bm - 10)^2 - 4m^2b^2 = 0 \Rightarrow bm = 5 \quad (2)$$

$$\text{Si } \mathcal{L}: mx - y + b = 0 \Rightarrow |d(C, \mathcal{L})| = r \Rightarrow \frac{|-5m + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{de donde obtenemos: } 20m^2 + 10bm + 45 - b^2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Sustituyendo el valor de (2) en (3) se tiene: } 20m^2 + 50 + 45 - \frac{25}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4m^4 + 19m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1/4 \vee m^2 = -5$$

$$\text{Para } m^2 = 1/4 \Leftrightarrow m = \pm 1/2, \text{ sustituyendo en (2): } b = \pm 10$$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathcal{L}_1: x - 2y + 20 = 0 \vee \mathcal{L}_2: x + 2y + 20 = 0 \quad \blacksquare$$

- 23** Determinar los vértices del cuadrado inscrito a las parábolas $\mathcal{P}_1: x^2 + 6y - 39 = 0$ y $\mathcal{P}_2: 4x^2 - 9y - 45 = 0$. Se piden solamente los vértices interiores y el lado del cuadrado.

Solución. Si $\mathcal{P}_1: (x-0)^2 = -6(y-13/2)$ y $\mathcal{P}_2: (x-0)^2 = \frac{9}{4}(y+5)$

para el cuadrado inscrito ABCD se necesita que :

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$$

Como las ordenadas de C y D son negativas

$$\Rightarrow \overline{BC} = \text{ordenada de } \mathcal{P}_1 + (-\text{ordenada de } \mathcal{P}_2)$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = y_1 - y_2 = \frac{39 - x^2}{6} - \frac{4x^2 - 45}{9}$$

$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow 2x = \frac{39 - x^2}{6} - \frac{4x^2 - 45}{9}$$

$$\text{de donde: } 11x^2 + 36x - 207 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -69/11$$

El valor de $x = 3$ determina B y C, y sus respectivos simétricos A y D.

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{39 - 9}{6} = 5, \quad y_2 = \frac{36 - 45}{9} = -1$$

Por tanto : A(-3, 5), B(3, 5), C(3, -1) y D(-3, -1)

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 6$$

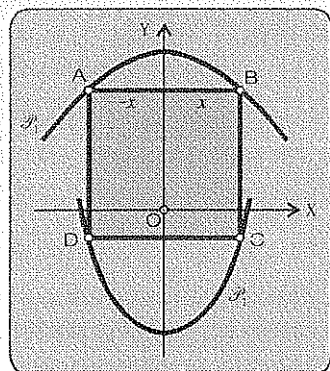


FIGURA 6.35